Algunos principios para la enseñanza y sus aplicaciones a las fracciones

Ron Aharoni
Matemáticas, Instituto Tecnológico de Israel

Cinco principios básicos para la enseñanza

- 1. El qué antes del cómo
- 2. La enseñanza sistemática
- 3. Lo concreto
- 4. El significado antes del cálculo
- 5. El uso de palabras precisas.

El qué antes del cómo

La matemática elemental es profunda

Enseñarla requiere saberla

Por lo tanto: a los profesores hay que enseñarles matemáticas elementales y no matemáticas superiores.

La enseñanza sistemática

La matemática es difícil porque se construye capa por capa

Remedio:

La enseñanza sistemática

(sin saltarse etapas)

Lo concreto

- Ejemplo:

  La enseñanza de la representación decimal de los números

Reuniendo decenas y centenas

y unidades de mil

a mano.

El significado antes del cálculo

- Ejemplo: el significado de la multiplicación.

Palabras

- Ejemplos:
- Multiplicador y multiplicando
- divisor y dividendo
- Suma, diferencia y cuociente

En esta charla-

El qué antes del cómo:

El caso de las fracciones

¿Qué es una fracción?

- Parte de un todo (?)
- Numerador y denominador (?)
- División (numerador dividido por un denominador) (?)
- Un número que no es un entero (?)

Ninguna de estas es esclarecedora

Una fracción es una combinación de división y multiplicación

(en este orden)

¿Cuánto es $\frac{5}{8}$ de 240?

Sólo el 25% de los estudiantes de 8° básico en Israel sabía la respuesta en las pruebas internacionales de 1999.

A ellos, nadie les enseñó qué es una fracción

Los dos pasos

a. Un octavo de 240 es 240:8, es decir, 30

b. 5 octavos es lo que el oído oye:
   5 octavos. Es decir, 5 veces 30.

La fracción es la combinación de dos operaciones

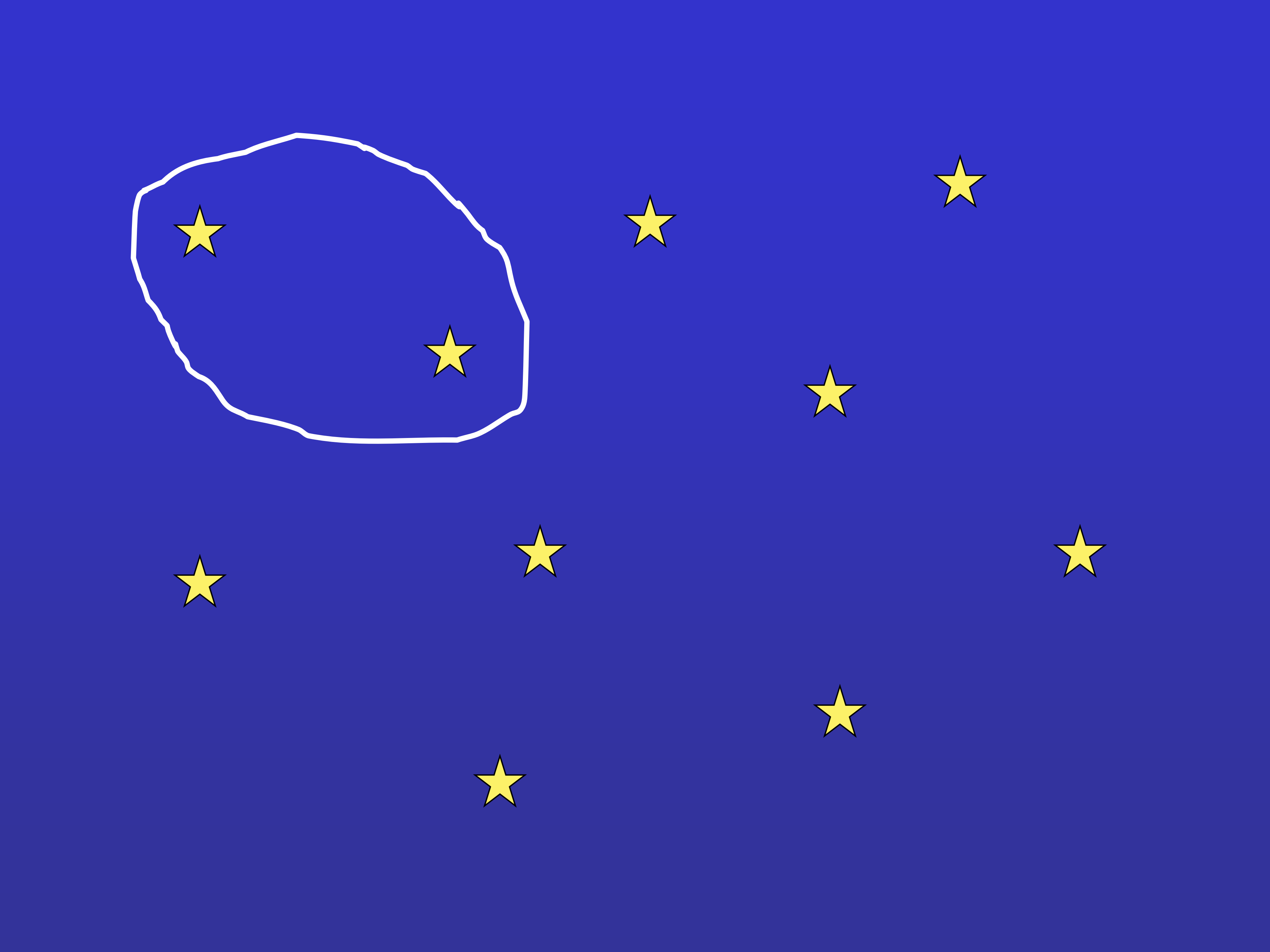
Tomar $\frac{5}{8}$ de algo significa:

a. Dividir por 8

b. Multipliclar el resultado por 5.

Una lección de repaso sobre fracciones

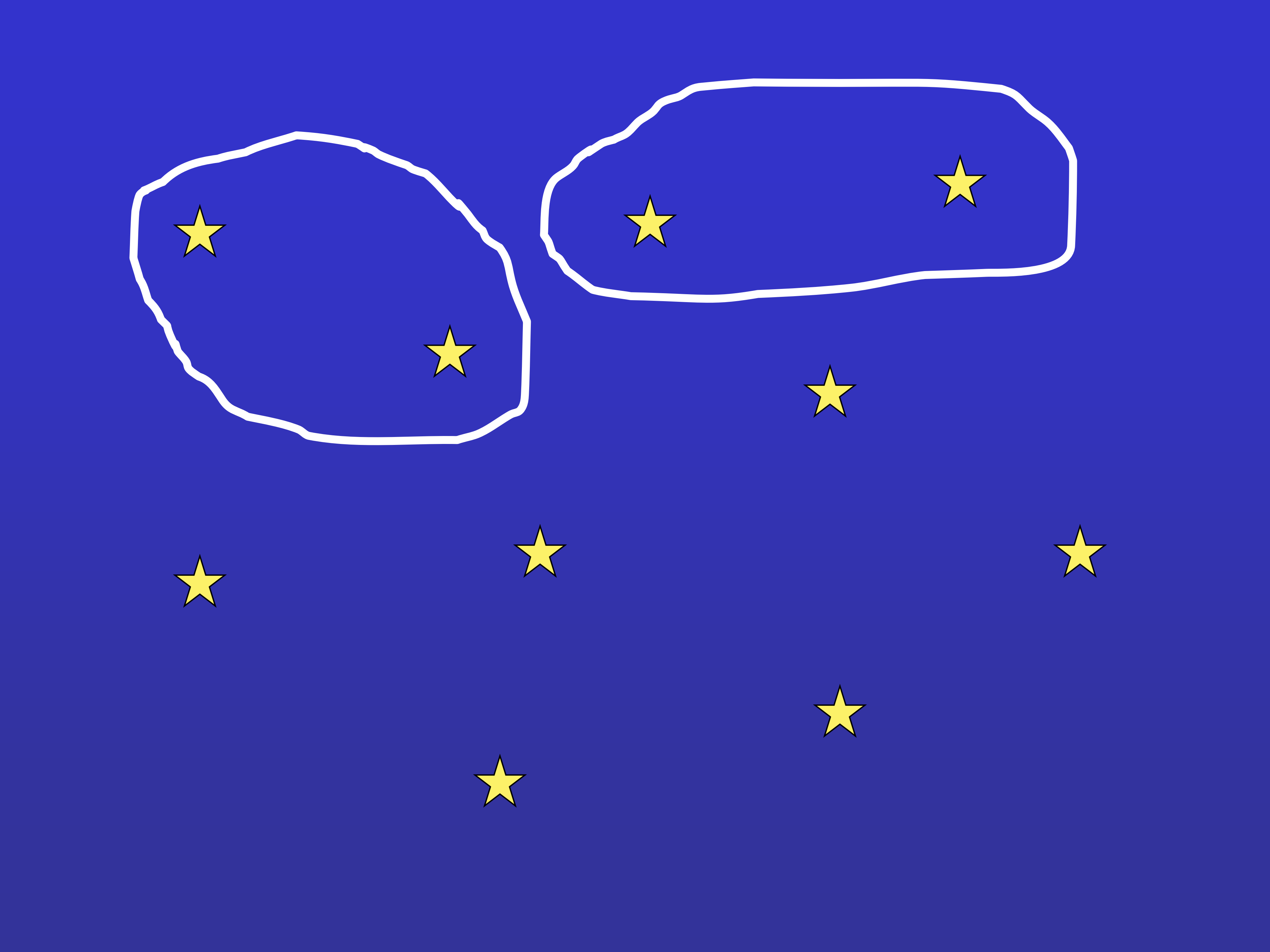
Encierra un quinto de las estrellas



Un quinto de 10 es 2.

$\frac{1}{5}$ de 10 es 2.

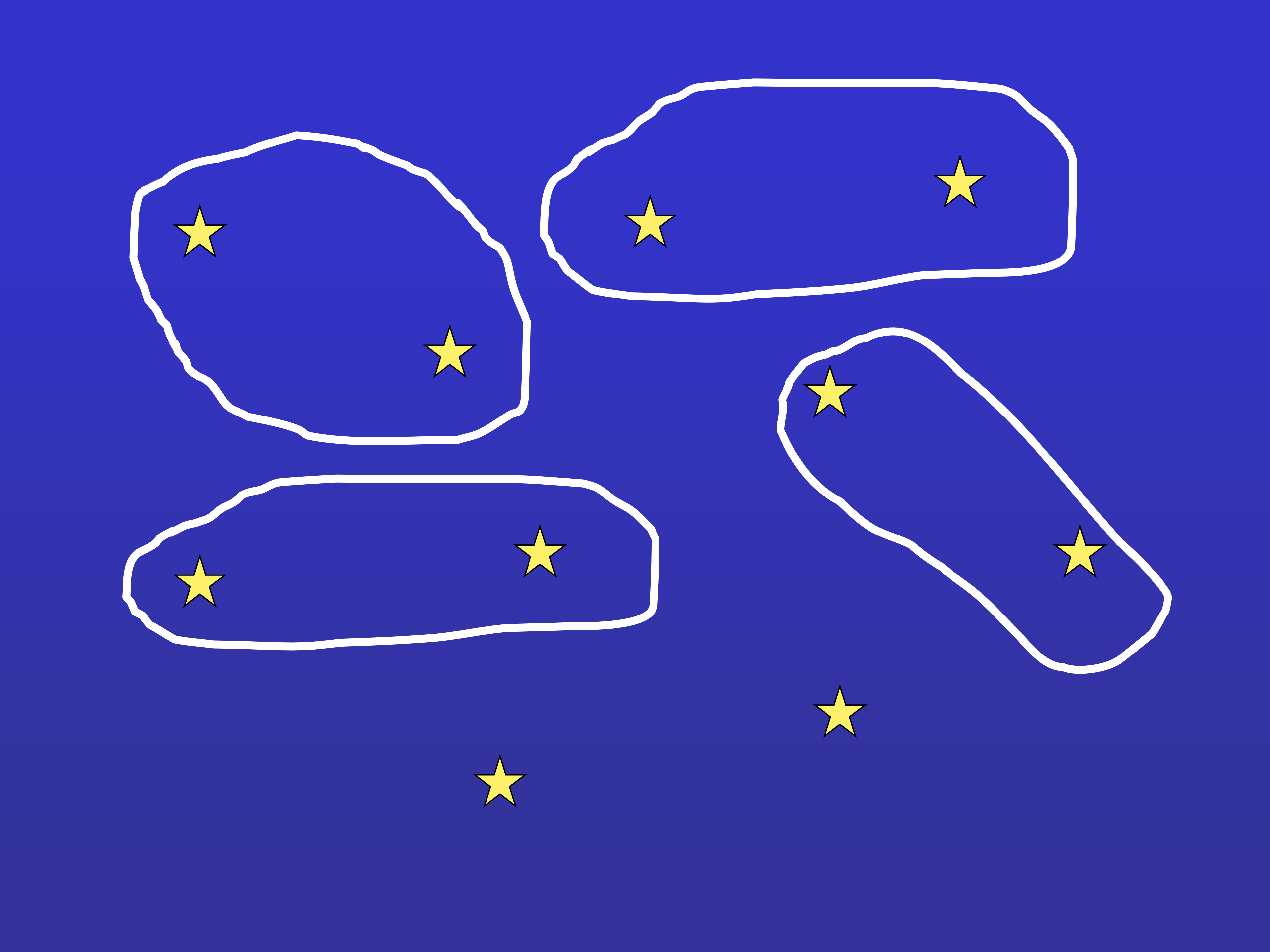
Ahora encierra otro quinto

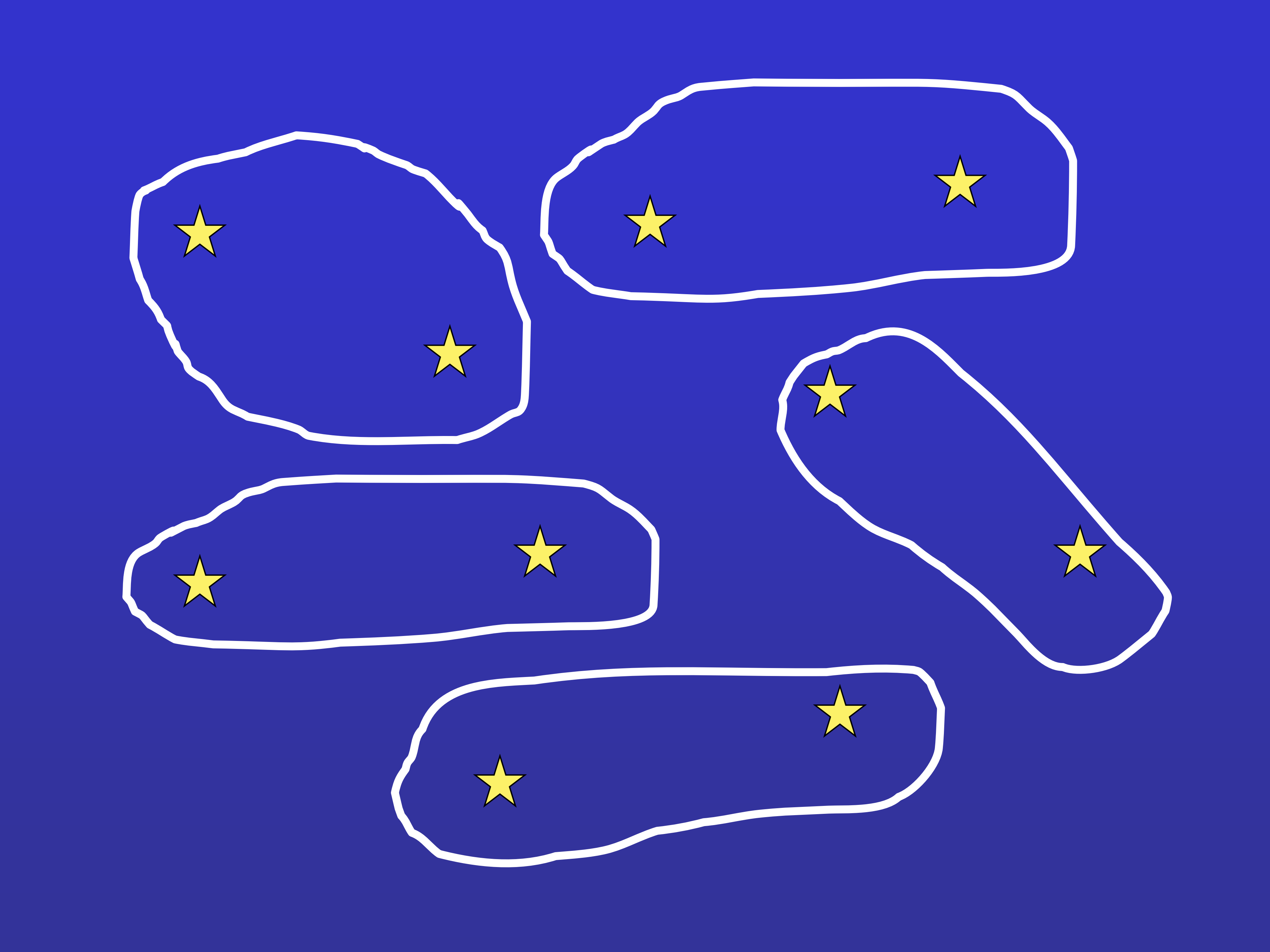


Dos quintos de 10 son 2 veces 2, que es 4.

$\frac{2}{5}$ de 10 es 4.

Encierra otro quinto





$\frac{4}{5}$ de 10 es 8.

$\frac{5}{5}$ de 10 es 10.

Uno principio de la enseñanza: repetir hasta que se rían

¿Cuánto es 5 quintos de 10?

¿Cuánto es 5 quintos de 20?

¿Cuánto es 5 quintos de 100?

¿Cuánto es 5 quintos de un millón?

Cuando los estudiantes se rían, significa que entendieron.

Ahora – imaginar fracciones:

¿Qué son 6 quintos de 10?

¿Puedes dibujarlo?

¿Qué son 100 quintos de 10?

El punto de partida – la división

Fracciones Egipcias - numerador 1

Una fracción Egipcia no es sino una división

Tomar $\frac{1}{5}$ es claramente dividir por 5.

Es decir, dividir entre 5 partes iguales, y tomar una de ellas.

Las fracciones deberían enseñarse junto con la división

- Cuando se aprende a dividir por 2, se define la "mitad", incluida su notación.

  Sí, inclusive en 1ero básico.

- En 2° básico se enseña $\frac{1}{3}$
- Y luego $\frac{2}{3}$: dos tercios son justamente "dos tercios".
- Dos tercios de 6 manzanas es 2 veces 2 manzanas.

La (equivocada) separación de las fracciones y la división

a. En el currículo: la división se enseña en 2° básico, las fracciones en 3ero básico, y principalmente en 4°.
b. Lo que se divide: Las fracciones son tomadas de las formas, la división es de números.

La razón de la separación:

Dos premisas falsas

a. “La división es lo opuesto de la multiplicación y la multiplicación es entre números”
b. Una fracción debería ser tomada de algo que parece un ‘todo’ y los números no son ‘todos’.

La primera suposición es errónea

- La multiplicación no es sólo entre números.
- Se puede multiplicar una manzana por 2.
- Dos veces una manzana es, justamente, 2 manzanas.

Un secreto no contado

- La multiplicación y el conteo son lo mismo.

Y también se puede dividir una manzana

Las figuras y los conjuntos pueden y deberían ser divididos.

La división de una manzana y un rectángulo por 3, debería anteceder a la división de 6 por 3.

La segunda premisa también es errónea:

- Un ‘todo’ no tiene porqué parecer un bloque
- Un conjunto también puede ser un todo.
- De hecho, los niños y niñas lo han encontrado antes.

La primera operación aritmética: formando un todo

Un conjunto puede ser un todo

Primer ejemplo: el sistema decimal

Este sistema está basado en tomar 10 objetos que se declaran como un objeto – una “decena”.

Luego estos objetos pueden ser contados y agrupados en decenas – diez decenas son llamadas “una centena”.

Segundo ejemplo de un conjunto como un todo:

La multiplicación

- 3 veces 4 significa tomar 4 elementos y considerarlos como una unidad.
- Y luego repetirlo 3 veces.
- (y una vez más): la multiplicación es conteo.

Dos preguntas misteriosas:

A. ¿Por qué $\frac{2}{3}$ de 24 es lo mismo que $\frac{2}{3} \times 24$?

Porque multiplicar es contar

Dos manzanas = 2 veces una manzana = 2 x manzana

De la misma forma,

$\frac{2}{3}$ de una manzana = $\frac{2}{3}$ veces una manzana =

$\frac{2}{3}$ x manzana

Del mismo modo,

$$\frac{2}{3} \text{ de 24 manzanas} =$$

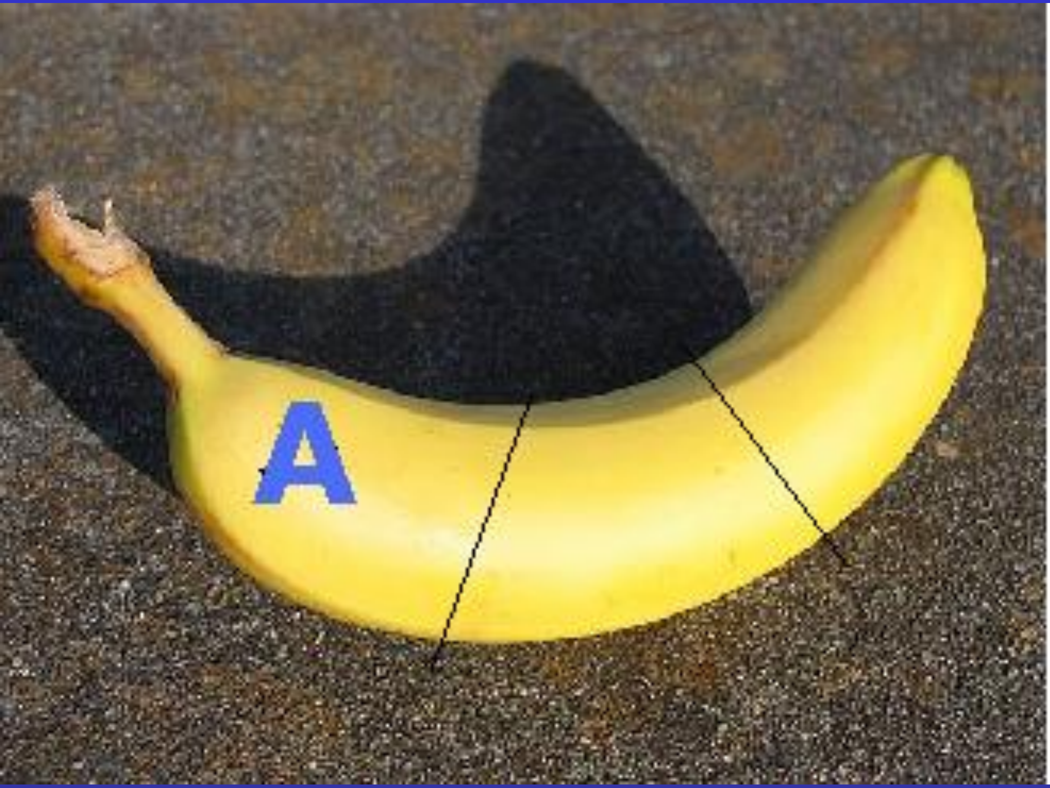
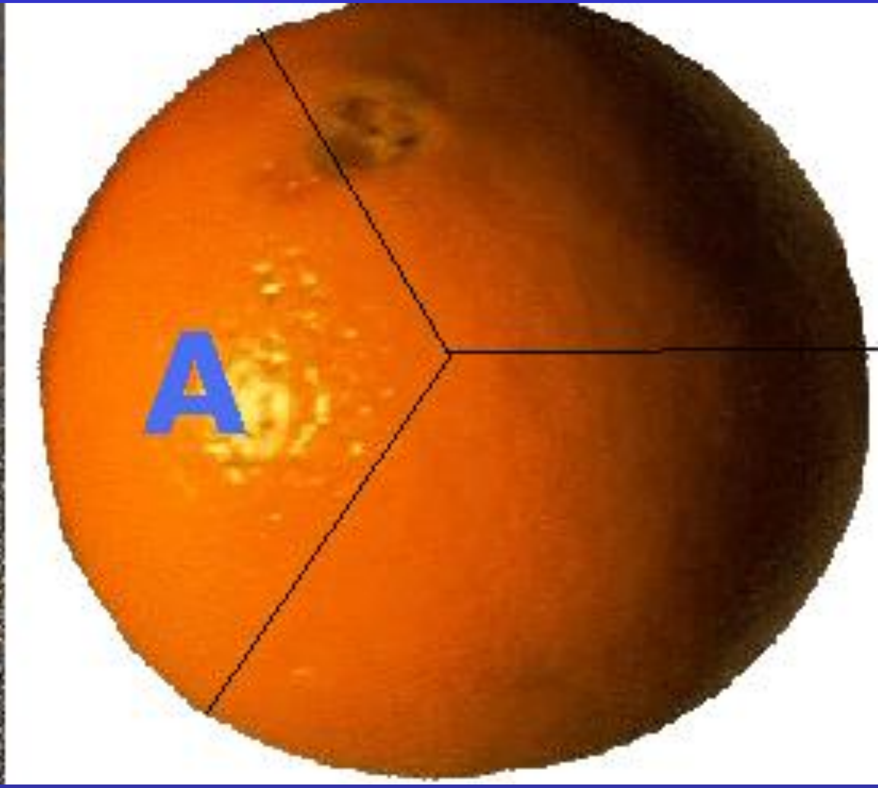
$$\frac{2}{3} \text{ veces 24 manzanas} =$$

$$\frac{2}{3} \times \text{24 manzanas.}$$

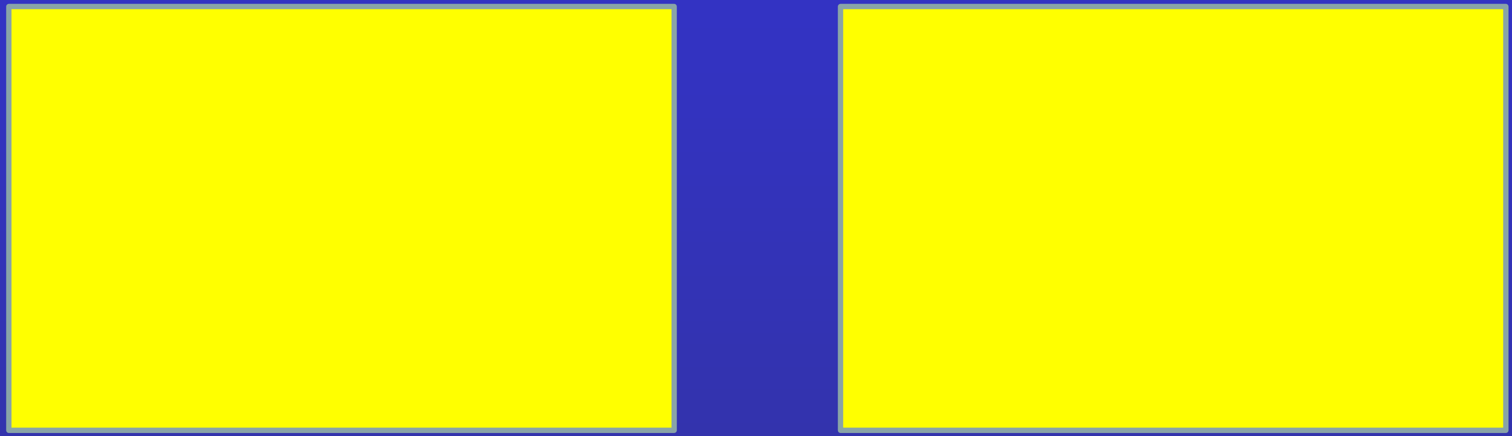
B. ¿Por qué $\frac{2}{3}$ es lo mismo que 2:3?

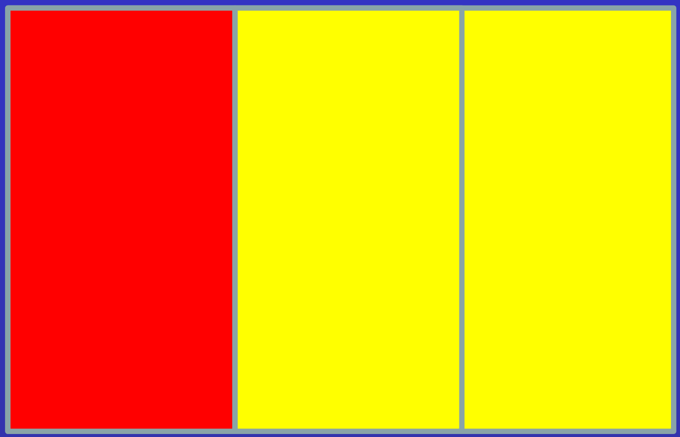
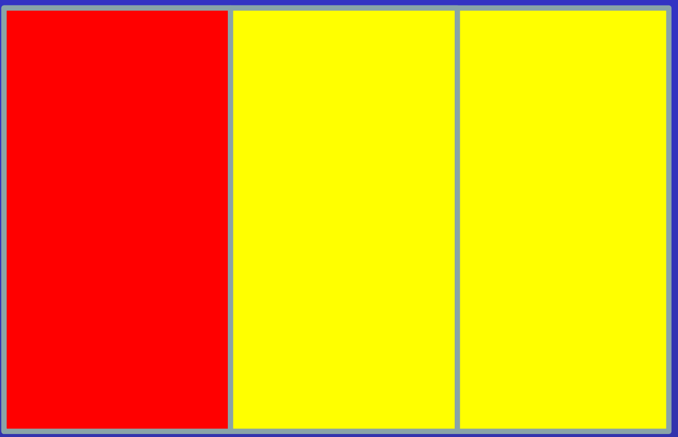
¿Cómo se puede dividir, en partes iguales, una naranja y un plátano entre 3 personas ?

Por supuesto, dividiendo cada uno en 3


A

A

¿Cómo se divide 2 rectángulos en 3?



Entonces, 2 rectángulos divididos en 3 es 2 tercios de un rectángulo

$$\mathbf{2:3} = \frac{2}{3}$$

Tres “trucos” para la enseñanza

Truco No 1:
Nada es demasiado simple

Siempre dar el ejemplo más simple.

No existe lo ‘demasiado simple’

Aún más importante – animar a los estudiantes a que den el ejemplo más sencillo.

Preguntar a los estudiantes cuál es el caso más simple de la división

(por supuesto, dividir por 1)

¿Cuál es la fracción más simple?

No es un medio, sino $\dfrac{1}{1}$

Truco N°2: repetir hasta que se rían

- ¿Cuánto es la mitad de 2 manzanas?
- Y ¿ $\frac{1}{3}$ de 3 manzanas?
- Y ¿ $\frac{1}{4}$ de 4 manzanas?
- Cuando ellos se rían, es que han entendido.

Truco N°3: invitar a los estudiantes a que proporcionen ejemplos ellos mismos.

De hecho, este es más que un truco – es un principio básico

Por ejemplo:

- Da un ejemplo de una fracción menor que 1/100
- Un ejemplo de una ecuación cuya solución sea 5
- Un ejemplo de dos fracciones cuya suma sea 1
- Un ejemplo de dos fracciones cuyo producto sea 1
- Un ejemplo de dos fracciones cuyo producto sea 2
- Un ejemplo de dos fracciones cuyo producto sea 3
- (repetir hasta que ellos se rían!)
- Un ejemplo de una fracción entre ½ y 1.

Segunda Parte II:
Operaciones con fracciones

Dónde comenzar

(La respuesta no es del todo obvia)

No con la suma, ni con la resta,
sino con la multiplicación

- Razón 1: las fracciones nacen de la multiplicación y división y por lo tanto se comportan mejor con respecto a estas operaciones.

- Razón 2: La multiplicación y la división son necesarias para la idea de común divisor.

Dos principios de organizadores

Multiplicar el numerador por 3 multiplica a la fracción por 3.

Multiplicar el denominador por 3 divide la fracción por 3

Dividiendo dos veces

- Qué sucede si dividimos una manzana en 2 partes y después cada parte la dividimos en 3:
- Tendremos 2×3 partes, así en realidad hemos dividido por 6.
- Del mismo modo, al dividir por 4 y luego por 5, estamos dividiendo por 20.

En el lenguaje de las fracciones:

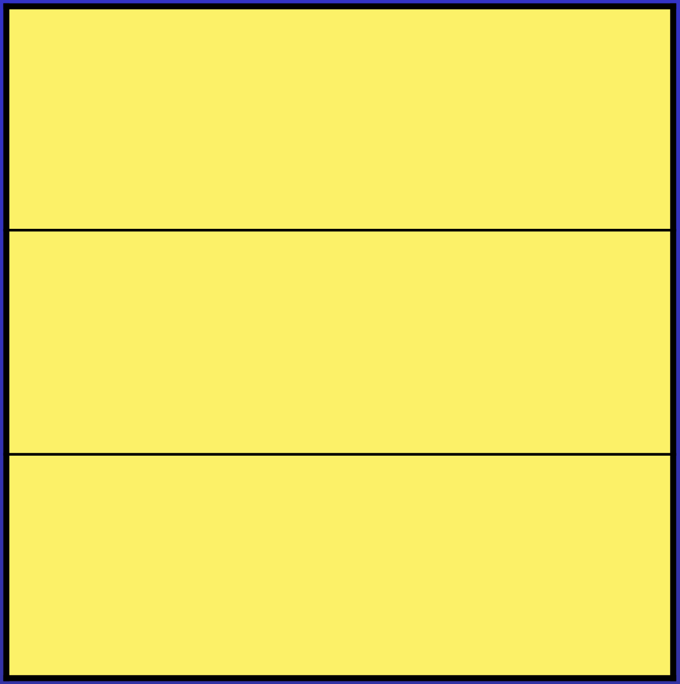
$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

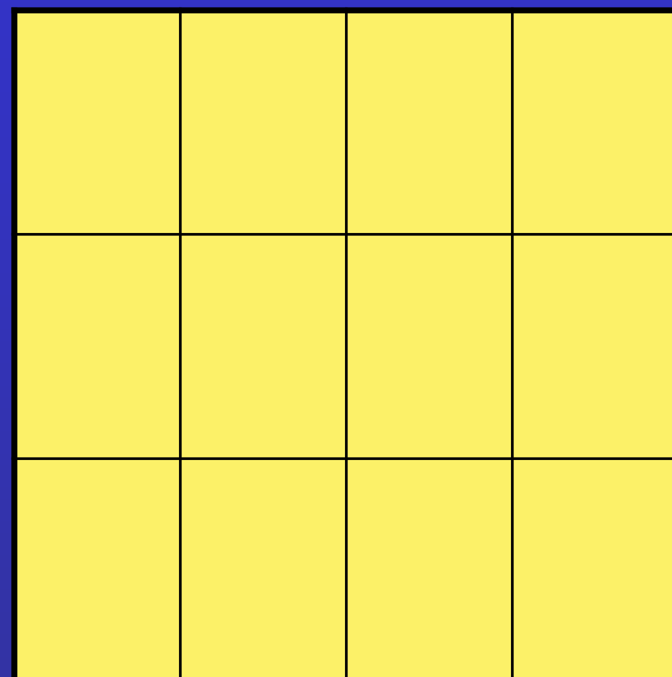
$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

Cuando el denominador es multiplicado por 4, la fracción es dividida por 4.

Un comentario didáctico: no hacer magia

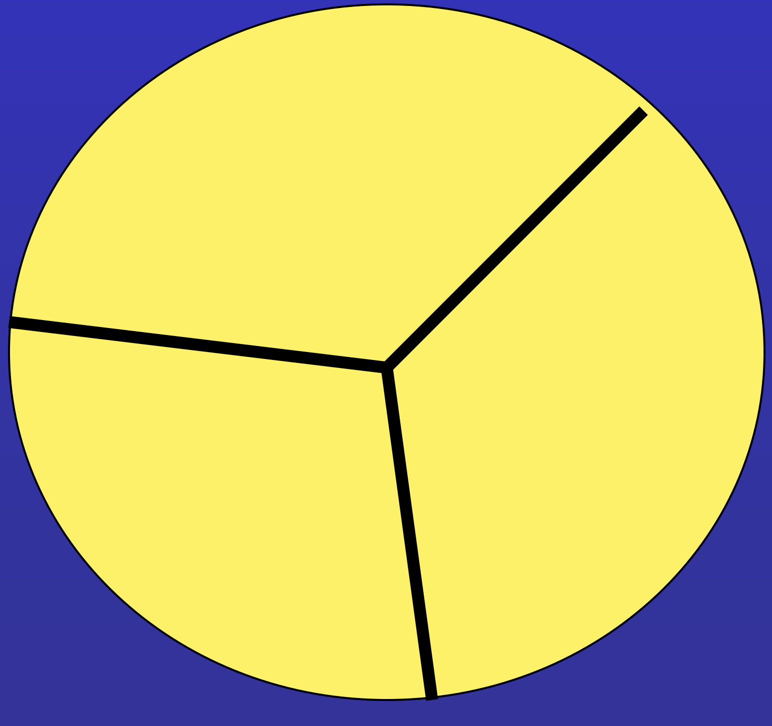
dividir por 3, y luego por 4 es fácil de hacer usando un rectángulo:



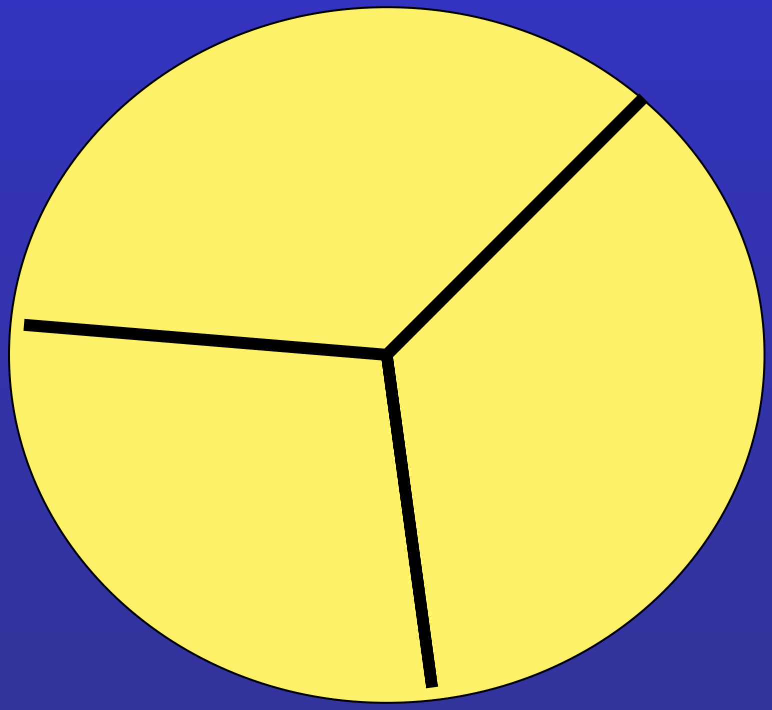


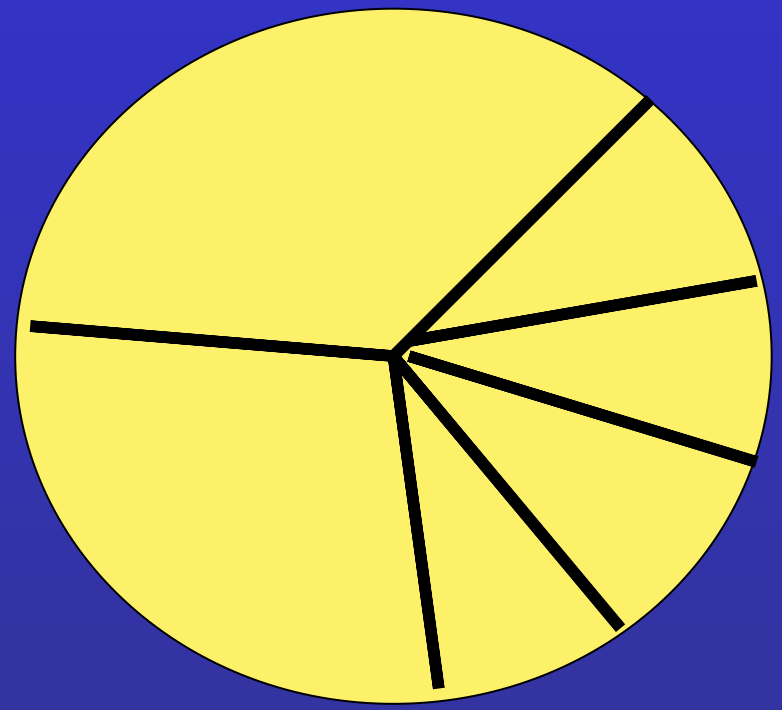
Pero esto parece mágia.

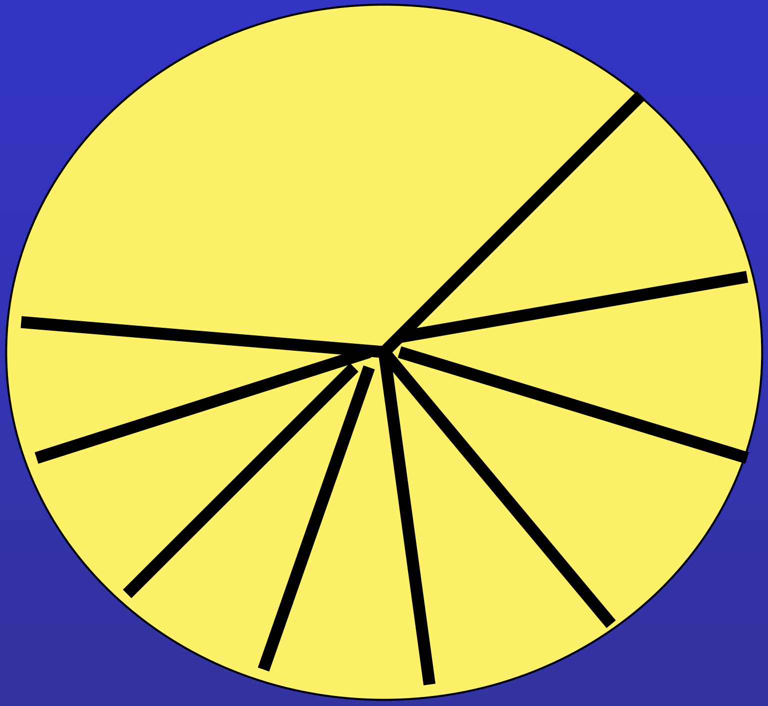
Hay que dejar que los niños lo hagan, por ejemplo con una pizza:

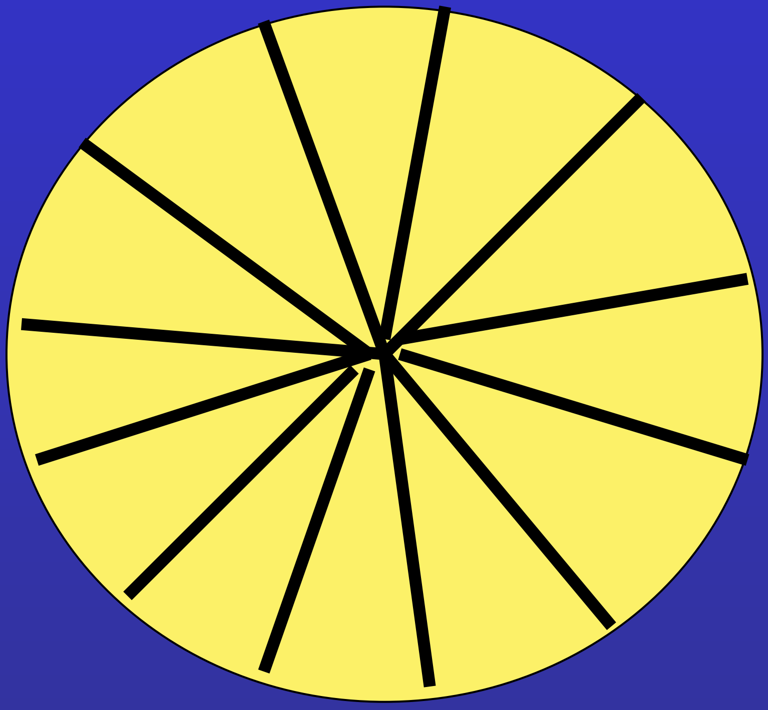


Pedirles que dividan cada parte en 4:

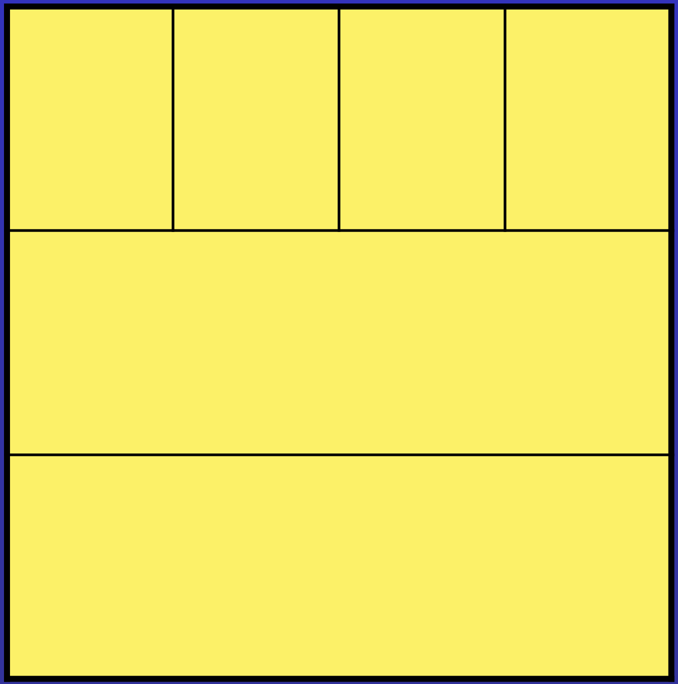


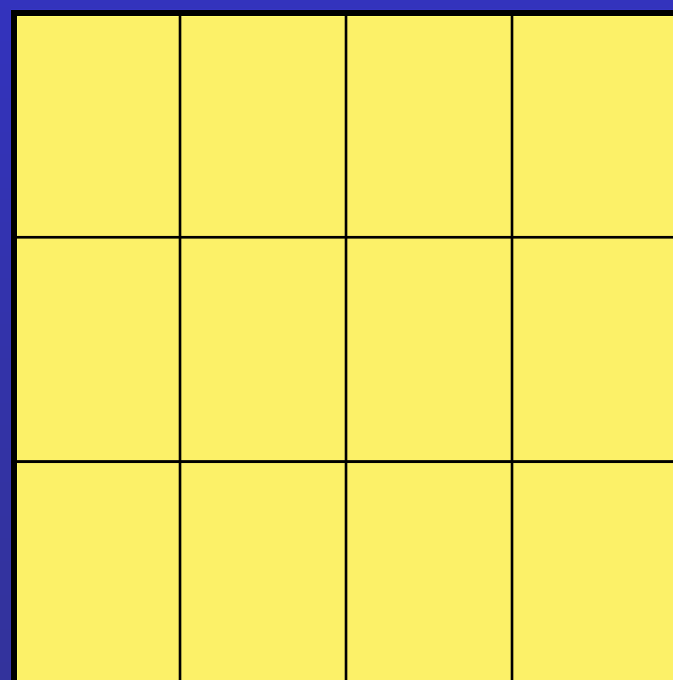






O con rectángulos, pero paso por paso:





Otro ejemplo: Cuánto es $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$

- Multiplicar $\frac{1}{4}$ por un tercio es tomar un tercio de $\frac{1}{4}$
- Que es dividir $\frac{1}{4}$ por 3.
- Lo que significa dividir por 4, y después por 3, es decir dividir por 12.

Así,

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

¿Qué sucede cuando se multiplica el numerador por 3?

Pregunta: ¿Qué es más – 6 manzanas, o 2 manzanas?

¿Cuántas veces más?

Y ahora:

¿Qué es más, $\frac{2}{7}$ o $\frac{6}{7}$?

¿Cuánto más?

Un truco de enseñanza: pregunta la mitad de la pregunta

No preguntar cuánto más es $\frac{6}{7}$ que $\frac{2}{7}$

Preguntar más bien: ¿Cuál es mayor?

Los estudiantes se preguntarán ellos mismos – ¿cuánto más grande?

Conclusión:

Cuando el numerador crece 3 veces, la fracción crece tres veces

Expansión

¿Qué sucede si primero multiplicas el numerador por 4 y luego el denominador por 4?

El número aumenta 4 veces, y luego se hace 4 veces más pequeño

De ese modo, vuelve a ser el mismo.

Cómo multiplicar fracciones

Primer Hecho:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Esto no es más que la definición de “dos tercios”

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Y por tanto-

Multiplicar por $\frac{2}{3}$ significa multiplicar por 2 y dividir por 3.

Y esto, como sabemos, significa multiplicar el numerador por 2 y el denominador por 3.

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5}$$

División de Fracciones

¿Cuánto es $10 : \frac{2}{3}$?

"Hazme una pregunta simple" –
¿Cuál es la división más simple?

- Por supuesto, 1:1. o 10:1.
- ¿Cuál es la división más simple por una verdadera? -

$$1:\frac{1}{2}$$

- ¿Cuántas veces cabe ½ en 1?
- ¿Qué pasa con $10:\frac{1}{2}$?
- Si ½ cabe 2 veces en 1, entonces ½ cabe 10 x 2 en 10.

- ¿Cuánto es $3 : \frac{1}{2}$? 6
- Y ¿ $5 : \frac{1}{2}$? 10
- ¿Cuál es la regla?
- Dividir por ½ es multiplicar por 2.

- Volvamos a la pregunta original – Cuánto es

$$10 : \frac{2}{3}$$

- $10 : \frac{1}{3} = 30$
- ¿Cuál es mayor, $10 : \frac{1}{3}$ o $10 : \frac{2}{3}$?

- Si $\frac{1}{3}$ entra 30 veces en 10, ¿cuántas veces $\frac{2}{3}$ entra en 10?

  Más, o menos que 10?

  ¿Cuánto menos?

Denominadores comunes

El vendedor de pizza y el cliente indeciso

Un cliente en un local de pizza no está seguro si:

va a tener que dividir la pizza entre 2 o 3 personas

¿En cuántas partes hay que dividir para que funcione en ambos casos?

Por supuesto, en 6 partes.

- ¿Y si fuera en 2 o 4 partes?
- ¿Qué hay de 4 y 5?
- ¿Y de 4 y 6?

¿Cuál es la más simple?

- ¿Y si duda entre 2 y 2?
- O incluso entre 1 y 1.
- El siguiente caso simple – entre 1 y 2.
- Alentar a los estudiantes a encontrar los casos más simples, en orden.